

Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Gelijke oppervlaktes

1 maximumscore 3

X, Y en Z moeten altijd 3 scorepunten worden toegekend, ongeacht of er wel of geen antwoord gegeven is, en ongeacht het gegeven antwoord. 3

2 maximumscore 5

- De oppervlakte van V is $F(9) - F(7) = \ln(12) - \ln(2)$ ($= \ln(6)$) 1
- De oppervlakte van W is $F(p) - F(9) = \ln(p^2 - 11p + 30) - \ln(12)$ 1
- Uit $\ln(p^2 - 11p + 30) - \ln(12) = \ln(6)$ volgt $\ln(p^2 - 11p + 30) = \ln(72)$ 1
- Hieruit volgt $p^2 - 11p - 42 = 0$ 1
- $(p - 14)(p + 3) = 0$ en dus $p = 14$ ($p = -3$ voldoet niet) 1

3 maximumscore 5

- De afgeleide van $\frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-6}$ is $-\frac{1}{(x-5)^2} - \frac{1}{(x-6)^2}$ (of: de afgeleide van $\frac{-1}{x-5} - \frac{1}{x-6}$ is $\frac{1}{(x-5)^2} + \frac{1}{(x-6)^2}$) 1
- De richtingscoëfficiënt van één van de raaklijnen in A is $(\frac{-1}{4} - \frac{1}{4}) = -8$
(of $(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = 8$) 1
- De hoek die deze raaklijn met de x -as maakt is $82,8\dots^\circ$ 1
- De hoek die de andere raaklijn met de x -as maakt is (vanwege symmetrie) ook $82,8\dots^\circ$ 1
- De gevraagde hoek is 14° 1

Drie op een rij

4 maximumscore 3

- De driehoeken ADS en FHS zijn gelijkvormig, waarbij de zijden van driehoek ADS $1\frac{1}{2}$ keer zo groot zijn als de zijden van driehoek FHS 1
- Hieruit volgt $\overline{AS} = \frac{3}{5}\overline{AF}$ 1
- $\overline{AS} = \frac{3}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ 1

of

- In een geschikt assenstelsel met A als oorsprong is $y = \frac{1}{2}x$ een vergelijking van de lijn door A en F en $y = 1 - \frac{1}{3}x$ een vergelijking van de lijn door H en D 1
- S is het snijpunt van deze twee lijnen, dus geldt $\frac{1}{2}x = 1 - \frac{1}{3}x$ en dat geeft $x = \frac{6}{5}$ 1
- Dus $y = \frac{3}{5}$ (en dus $\overline{AS} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$) 1

of

- In een geschikt assenstelsel met A als oorsprong is $y = \frac{1}{2}x$ een vergelijking van de lijn door A en F en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ een vectorvoorstelling van de lijn door H en D 1
- S is het snijpunt van deze twee lijnen, dus geldt $1 - \lambda = \frac{1}{2} \cdot 3\lambda$ en dat geeft $\lambda = \frac{2}{5}$ 1
- Dus $\overline{AS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

5 maximumscore 3

- $\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ 1

- $\overrightarrow{HD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ 1

- $\overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{HD} = 0$ dus \overrightarrow{BS} en \overrightarrow{HD} staan loodrecht op elkaar 1

of

- In een geschikt assenstelsel is de vergelijking van de cirkel met middelpunt C door B $(x-2)^2 + y^2 = 1^2$ 1

- S ligt op de cirkel want $(\frac{6}{5}-2)^2 + (\frac{3}{5})^2 = 1^2$ 1

- Dus $\angle BSD = 90^\circ$ (Thales) (, dus \overrightarrow{BS} en \overrightarrow{HD} staan loodrecht op elkaar) 1

of

- $(\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix})$ dus) de richtingscoëfficiënt van de lijn door B en S is 3 1

- (Uit de gegevens volgt:) de richtingscoëfficiënt van de lijn door H en D is $-\frac{1}{3}$ 1

- $3 \cdot -\frac{1}{3} = -1$ dus \overrightarrow{BS} en \overrightarrow{HD} staan loodrecht op elkaar 1

Modeltube

6 maximumscore 6

- De omtrek van de cilindervormige koker is 4π 1
- De diameter van de halve cirkel op hoogte h is $0,4h$ 1
- De lengte van één lijnstuk is $2\pi - 0,2\pi h$ 1
- $A(h) = \pi(0,2h)^2 + 0,4h(2\pi - 0,2\pi h)$ ($= \pi(0,8h - 0,04h^2)$) of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Beschrijven hoe (met de GR of met behulp van een primitieve van I) de waarde van I gevonden kan worden 1
- De inhoud is $83,7\dots$ (of $\frac{80\pi}{3}$) en dat is groter dan 80 (of: de inhoud is $83,7\dots$ (of $\frac{80\pi}{3}$) en dus kan de modeltube 80 cm^3 bevatten) 1

Vierkanten bij een exponentiële functie

7 maximumscore 8

- De oppervlakte van vierkant V is p^2 1
- De oppervlakte van vierkant W is $(e^p)^2 = e^{2p}$ 1
- $R = \frac{p^2}{e^{2p}}$ 1
- $\frac{dR}{dp} = \frac{2pe^{2p} - 2p^2e^{2p}}{(e^{2p})^2}$ 2
- $\frac{dR}{dp} = 0$ dus $(2p - 2p^2)e^{2p} = 0$ 1
- Dit geeft ($p = 0$ of) $p = 1$ 1
- De maximale waarde van R is $(R(1) =) \frac{1}{e^2}$ 1

of

- R is maximaal als \sqrt{R} maximaal is 1
- $\sqrt{R} = \frac{\text{zijde } V}{\text{zijde } W}$ 1
- $\sqrt{R} = \frac{p}{e^p}$ 1
- $\frac{d\sqrt{R}}{dp} = \frac{e^p - pe^p}{e^{2p}}$ 2
- $\frac{d\sqrt{R}}{dp} = 0$ dus $p = 1$ 1
- De maximale waarde van \sqrt{R} is $(\sqrt{R(1)} =) \frac{1}{e}$ 1
- De maximale waarde van R is $\frac{1}{e^2}$ 1

of

Vraag	Antwoord	Scores
	• De oppervlakte van vierkant V is p^2	1
	• De oppervlakte van vierkant W is $(e^p)^2 = e^{2p}$	1
	• $R = \frac{p^2}{e^{2p}} = p^2 \cdot e^{-2p}$	1
	• $\frac{dR}{dp} = 2pe^{-2p} - 2p^2e^{-2p}$	2
	• $\frac{dR}{dp} = 0$ dus $(2p - 2p^2)e^{-2p} = 0$	1
	• Dit geeft ($p = 0$ of) $p = 1$	1
	• De maximale waarde van R is $(R(1) =) \frac{1}{e^2}$	1

Opmerking

Als een kandidaat de ketting-, product- of quotiëntregel niet of onjuist heeft toegepast, voor deze vraag maximaal 6 scorepunten toekennen.

Gelijke hoeken

8 maximumscore 4

- (Omdat k , l en m stijgende lijnen zijn, moet gelden:)

$$\frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \right|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \right|} \quad 1$$

- $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = 5 + 12a$ en $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = 3 + 4a$ 1

- Dus $\frac{5 + 12a}{13} = \frac{3 + 4a}{5}$ 1

- Hieruit volgt ($25 + 60a = 39 + 52a$ en dus) $8a = 14$ waaruit volgt $a = 1\frac{3}{4}$ 1

of

- $\left| \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = 13$ en $\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = 5$ 1

- $5 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} + 13 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 112 \end{pmatrix}$ 2

- Dus $a = \left(\frac{112}{64}\right) 1\frac{3}{4}$ 1

Opmerking

Voor het tweede antwoordelement van het tweede antwoordalternatief mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.

9 maximumscore 5

- In S geldt $29 + 5s = 3t$ en $4 + 12s = 24 + 4t$ 1

- Beschrijven hoe dit stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden opgelost kan worden 1

- Dit geeft $s = 11$ (en $t = 28$) 1

- Dus $S(84, 136)$ 1

- Hieruit volgt $b = 136 - 84 \cdot 1\frac{3}{4} = -11$ 1

of

- Een vergelijking van k is $12x - 5y = 328$ en voor lijn l geldt $x = 3t$ en $y = 24 + 4t$ 1

- Lijn k snijden met lijn l geeft $12(3t) - 5(24 + 4t) = 328$ 1

- Dit geeft $t = 28$ 1

- Dus $S(84, 136)$ 1

- Hieruit volgt $b = 136 - 84 \cdot 1\frac{3}{4} = -11$ 1

Verouderingskromme

10 maximumscore 3

- (Er moet gelden $2 \leq C < 3$, dus) de vergelijkingen $6 - 5\left(1 - \frac{t}{25}\right)^{\frac{1}{2,3}} = 2$ en

$$6 - 5\left(1 - \frac{t}{25}\right)^{\frac{1}{2,3}} = 3 \text{ moeten worden opgelost} \quad 1$$

- Een beschrijving waaruit de oplossing $t \approx 10,04$ van de eerste vergelijking (of de oplossing $t \approx 17,28$ van de tweede vergelijking) volgt 1
- De andere oplossing is $t \approx 17,28$ (of $t \approx 10,04$), dus het gevraagde aantal jaren is 7,2 1

11 maximumscore 4

- $C = 6 - 5\left(1 - \frac{t}{L}\right)^{\frac{1}{2,3}}$ geeft $\left(1 - \frac{t}{L}\right)^{\frac{1}{2,3}} = \frac{1}{5}(6 - C)$ 1

- $\left(1 - \frac{t}{L}\right)^{\frac{1}{2,3}} = \frac{1}{5}(6 - C)$ geeft $1 - \frac{t}{L} = \left(\frac{1}{5}(6 - C)\right)^{2,3}$ 1

- Dat geeft $1 - \frac{t}{L} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2,3} (6 - C)^{2,3}$ dus $\frac{t}{L} = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{2,3} (6 - C)^{2,3}$
(dus $t = L - L \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2,3} \cdot (6 - C)^{2,3}$ of $t = L - L \cdot 0,0246\dots \cdot (6 - C)^{2,3}$) 1

- De gevraagde waarde van a is $\left(\frac{1}{5}\right)^{2,3} \approx 0,025$ en $b = 2,3$ 1

12 maximumscore 3

- De vergelijking $1 + \frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{t}{L}\right) = 3$ moet worden opgelost 1

- Dus $\frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{t}{L}\right) = 2$ en dit geeft $1 - \frac{t}{L} = \frac{1}{4}$ 1

- Hieruit volgt $t = \frac{3}{4}L$, dus het gevraagde percentage is 75 1

Cosinusgrafiek door hoogste punten

13 maximumscore 4

- $-2\cos^2(x) + 3\cos(x) - 1 = 0$ geeft $(\cos(x) - 1)(-2\cos(x) + 1) = 0$ (of gebruik van de abc -formule) 1
- Dit geeft $\cos(x) = 1$ of $\cos(x) = \frac{1}{2}$ 1
- In het gevraagde gemeenschappelijke punt met de x -as geldt $\cos(x) = \frac{1}{2}$ 1
- Dus de gevraagde x -coördinaat is $\frac{1}{3}\pi$ 1

14 maximumscore 4

- $f_p'(x) = 4\cos(x) \cdot \sin(x) - p \cdot \sin(x)$ 2
- $f_p'(a) = 0$ geeft $\sin(a) \cdot (4\cos(a) - p) = 0$ 1
- Dit geeft $\sin(a) = 0$ of $\cos(a) = \frac{1}{4}p$, dus (omdat $\sin(a) = 0$ hoort bij de extremen met $x = 0$) hoort $\cos(a) = \frac{1}{4}p$ bij de hoogste punten (en dus geldt in een hoogste punt met x -coördinaat a dat $\cos(a) = \frac{1}{4}p$) 1

Opmerking

Als een kandidaat de kettingregel niet of onjuist heeft toegepast, voor deze vraag maximaal 2 scorepunten toekennen.

15 maximumscore 4

- In een hoogste punt geldt $(\cos(a) = \frac{1}{4}p$ dus $p = 4\cos(a)$ en $f_p(a) = -2\cos^2(a) + p \cdot \cos(a) - 1$ 1
 - Substitutie geeft $f_p(a) = -2\cos^2(a) + 4\cos(a) \cdot \cos(a) - 1$ 1
 - Dus $f_p(a) = 2\cos^2(a) - 1$ 1
 - $2\cos^2(a) - 1 = \cos(2a)$, dus de hoogste punten van de grafieken van f_p liggen op de grafiek van g 1
- of
- In een hoogste punt geldt $\cos(a) = \frac{1}{4}p$ en $f_p(a) = -2\cos^2(a) + p \cdot \cos(a) - 1$ 1
 - Substitutie geeft $f_p(a) = -\frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{4}p^2 - 1 = \frac{1}{8}p^2 - 1$ 1
 - Dus $f_p(a) = 2\cos^2(a) - 1$ 1
 - $2\cos^2(a) - 1 = \cos(2a)$, dus de hoogste punten van de grafieken van f_p liggen op de grafiek van g 1

Loodrecht door de parabool

16 maximumscore 6

- $\frac{dx}{dt} = 2t$ en $\frac{dy}{dt} = 1$ 1
 - Dan volgt $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2t}$ 1
 - ($t = \sqrt{a}$, dus) de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A is $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ 1
 - De richtingscoëfficiënt van lijn AM is $\frac{\sqrt{a}}{a-r}$ 1
 - Er moet gelden $\frac{\sqrt{a}}{a-r} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}} = -1$ 1
 - Uit $\frac{1}{2(a-r)} = -1$ volgt $a-r = -\frac{1}{2}$ en dus $a = r - \frac{1}{2}$ 1
- of
- $\frac{dx}{dt} = 2t$ en $\frac{dy}{dt} = 1$ 1
 - ($t = \sqrt{a}$, dus) een richtingsvector van de raaklijn in A is $\begin{pmatrix} 2\sqrt{a} \\ 1 \end{pmatrix}$ 1
 - $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} a-r \\ \sqrt{a} \end{pmatrix}$ 1
 - Er moet gelden $\begin{pmatrix} a-r \\ \sqrt{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{a} \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ 1
 - Dus $(a-r)(2\sqrt{a}) + \sqrt{a} = 0$ 1
 - Hieruit volgt $2(a-r) = -1$ en dus volgt $a-r = -\frac{1}{2}$ en dus $a = r - \frac{1}{2}$ 1

of

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

- (Voor het bovenste deel van de parabool geldt) $y = \sqrt{x}$ 1
 - $\left(\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ dus}\right)$ een richtingsvector van de raaklijn in A is $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{a}} \end{pmatrix}$ 1
 - $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} a-r \\ \sqrt{a} \end{pmatrix}$ 1
 - Er moet gelden $\begin{pmatrix} a-r \\ \sqrt{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{a}} \end{pmatrix} = 0$ 1
 - Dus $a-r + \sqrt{a} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}} = 0$ 1
 - Dus $a-r + \frac{1}{2} = 0$ en dus $a = r - \frac{1}{2}$ 1
- of
- (Voor het bovenste deel van de parabool geldt) $y = \sqrt{x}$ 1
 - $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ dus de helling van de parabool in A is $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ 1
 - MA (staat hier loodrecht op en) heeft (dus) richtingscoëfficiënt $-2\sqrt{a}$ 1
 - Dus (omdat $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} a-r \\ \sqrt{a} \end{pmatrix}$) $-2\sqrt{a} = \frac{\sqrt{a}}{a-r}$ 1
 - Dus $-2\sqrt{a}(a-r) = \sqrt{a}$ ofwel $-2(a-r) = 1$ 1
 - Dat geeft $-a+r = \frac{1}{2}$ dus $a = r - \frac{1}{2}$ 1

17 maximumscore 6

- De zijden van driehoek $AA'M$ (met A' de loodrechte projectie van A op de x -as) hebben lengte $\frac{1}{2}$, $\sqrt{r - \frac{1}{2}}$ en $\frac{1}{2}r$ 2
- De vergelijking $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{r - \frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}r\right)^2$ 1
- Dit herleiden tot $r^2 - 4r + 1 = 0$ 1
- Dit geeft $r = 2 + \sqrt{3}$ en $r = 2 - \sqrt{3}$ (of gelijkwaardige uitdrukkingen) 1
- Het antwoord $r = 2 + \sqrt{3}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of

- De zijden van driehoek $AA'M$ (met A' de loodrechte projectie van A op de x -as) hebben lengte $\frac{1}{2}$, \sqrt{a} en (omdat $MA = \frac{1}{2}r$) $\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}$ 2
- De vergelijking $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\sqrt{a})^2 = \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}\right)^2$ 1
- Dit herleiden tot $4a^2 - 12a - 3 = 0$ 1
- Dit geeft $a = \frac{3}{2} + \sqrt{3}$ en $a = \frac{3}{2} - \sqrt{3}$ (of gelijkwaardige uitdrukkingen) 1
- Het antwoord $r = 2 + \sqrt{3}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of

Vraag	Antwoord	Scores
	• $A(a, \sqrt{a}) = (r - \frac{1}{2}, \sqrt{r - \frac{1}{2}})$	1
	• Dus $B(r-1, 2\sqrt{r - \frac{1}{2}})$	1
	• De cirkel met middelpunt M en straal r heeft vergelijking $(x-r)^2 + y^2 = r^2$	1
	• B ligt op deze cirkel, dus $(-1)^2 + 4r - 2 = r^2$ ofwel $r^2 - 4r + 1 = 0$	1
	• Dit geeft $r = 2 + \sqrt{3}$ en $r = 2 - \sqrt{3}$ (of gelijkwaardige uitdrukkingen)	1
	• Het antwoord $r = 2 + \sqrt{3}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)	1
	of	
	• A is het midden van MB , dus $B(2a-r, 2\sqrt{a})$	2
	• De coördinaten van B invullen in $(x-r)^2 + y^2 = r^2$ geeft $(2a-2r)^2 + (2\sqrt{a})^2 = r^2$	1
	• $a = r - \frac{1}{2}$ invullen geeft $(-1)^2 + 4r - 2 = r^2$ ofwel $r^2 - 4r + 1 = 0$	1
	• Dit geeft $r = 2 + \sqrt{3}$ en $r = 2 - \sqrt{3}$ (of gelijkwaardige uitdrukkingen)	1
	• Het antwoord $r = 2 + \sqrt{3}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)	1
	of	
	• Lijn AM heeft vergelijking $y = -2\sqrt{a}(x-r)$	1
	• Snijden met de cirkel $(x-r)^2 + y^2 = r^2$ geeft $(x-r)^2 + 4a(x-r)^2 = r^2$, ofwel $(x-r)^2 = \frac{r^2}{1+4a}$	1
	• Dit geeft $x_B = r - \sqrt{\frac{r^2}{1+4a}}$, ofwel (met $a = r - \frac{1}{2}$) $x_B = r - \sqrt{\frac{r^2}{4r-1}}$	1
	• (Omdat $r - x_B = 2(r-a) = 1$ geldt) $\sqrt{\frac{r^2}{4r-1}} = 1$, dus $r^2 - 4r + 1 = 0$	1
	• Dit geeft $r = 2 + \sqrt{3}$ en $r = 2 - \sqrt{3}$ (of gelijkwaardige uitdrukkingen)	1
	• Het antwoord $r = 2 + \sqrt{3}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)	1

Opmerking

Voor het eerste antwoordelement van het eerste, tweede en vierde antwoordalternatief mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.